泰勒名言：

不是去記住，但是要去瞭解。
我不能記住任何一件事，如果我不瞭解它的話。

=======氫彈之父泰勒博士訪華=======

於民國 70 年 11 月 25 日在台大物理系館
演講後，回答現代台灣學生所問的問題：

「記住所有的公式（方程式），是很重要的嗎？」

高二上　指數、對數函數

思考 1　指數律 2
思考 2　指數方程式根的討論 3
思考 3　指數函數 6
思考 4　指數作圖及應用 9
思考 5　指數不等式 13
思考 6　對數律及運算 19
思考 7　對數有意義 31
思考 8　以數表示問題 33
思考 9　對數方程式 36
思考 10　對數方程式根的討論 45
思考 11　對數函數 49
思考 12　對數作圖及應用 54
思考 13　反函數 57
思考 14　比較大小 61
思考 15　對數不等式 67

思考 1　指數律

【觀念一】指數律：

(1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ ， $a^m \div a^n = a^{m-n}$

(2) $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$

(3) $\left(ab\right)^n = a^n b^n$

【觀念二】非正整數的指數定義：

(4) $a^0 = 1$ 　　（ $a \neq 0$ ）

(5) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ 　　（ $a \neq 0$ ）

(6) $a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a}$ 　　（ $a > 0$ ）

(7) $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$ 　　（ $a > 0$ ）

【觀念三】自然限制：

(8) $a > 0$, $a^x > 0, x \in \mathbb{R}$

(9) $a > 0, a^x + a^{-x} \geq 2, x \in \mathbb{R}$

【觀念四】常用技巧：

(10) $4^x = \left(2^x\right)^2$, $100^x = \left(10^x\right)^2$

(11) $4^x + 4^{-x} = \left(2^x + 2^{-x}\right)^2 - 2$

【觀念五】一對一：

(12) $a > 0, a \neq 1, a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$

Note：

思考 2　指數方程式根的討論

【觀念一】一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 二根為 α,β，則

$$\alpha+\beta=\frac{-b}{a},\alpha\beta=\frac{c}{a}$$

【觀念二】指數方程式欲討論根的性質，最好先作 $\boxed{\text{參數變換}}$，將原式改為多項方程式

Note：

例1《根與係數的修正》

若 α,β 為方程式 $\left(2^x\right)^2-12\left(2^x\right)+16=0$ 之二根，則二根之和 $\alpha+\beta=$______。

答：4

小寬的叮嚀

Ex 若方程式 $4^x-5\cdot 2^{x+1}+8=0$ 的二根為 α 及 β，則 $\alpha+\beta=$______。

答：3

例2《參數變換的根性改變》

若指數方程式 $2^{2x}+(m-7)\cdot 2^{x+1}+9=0$ 有兩相異實根，則實數 m 的範圍為______。

答：$m<4$

小寬的叮嚀

Ex 若方程式 $2^{2x}+a\cdot 2^{x+1}+3-2a=0$ 有相異兩實根，則實數 a 的範圍為______。

答：$a<-3$

例3 《分式特例》	小寬的叮嚀
若分式方程式$5^x-\dfrac{2a+1}{5^x}=2a$有實數解，則實數a的範圍為______。 答：$a>\dfrac{-1}{2}$	

每　日　練　功

1. 若方程式$3^{2x+1}-3^{x+2}+1=0$的二根為α及β，則$\alpha+\beta=$______。
   答：-1

2. 若α，β是方程式$9^{x-1}-82\cdot 3^{x+1}+1=0$之兩根，則$\alpha+\beta=$______。
   答：2

3. 若方程式$4\cdot 3^{2x}-4a\cdot 3^{x+2}+20-9a=0$有兩實根，則實數$a$的範圍為______。
   答：$\dfrac{4}{9}\le a<\dfrac{20}{9}$

4. 若分式方程式$3^x-(5a-1)=\dfrac{2(5a+1)}{3^x}$有實數解，則實數$a$的範圍為______。
   答：$a>\dfrac{-1}{5}$

《挑戰題》

5. 若分式方程式$\dfrac{2^x+2^{-x}}{3}=\dfrac{4^x+4^{-x}}{a}$有實數解，則實數$a$的範圍為______。

答：$a\geq 3$

6. 若分式方程式$\dfrac{3^x-3^{-x}}{5}=\dfrac{9^x+9^{-x}}{a}$有實數解，則實數$a$的範圍為______。

答：$a\leq -10\sqrt{2}$或$a\geq 10\sqrt{2}$

7. 若分式方程式$\dfrac{2^x+2^{-x}}{5}=\dfrac{2^x-2^{-x}}{a}$有實數解，則實數$a$的範圍為______。

答：$-5<a<0$或$0<a<5$

8. 若方程式$4^x-3\cdot 2^{x+2}+a=0$有二正根，則實數a的範圍為______。

答：$11<a\leq 36$

思考3　指數函數

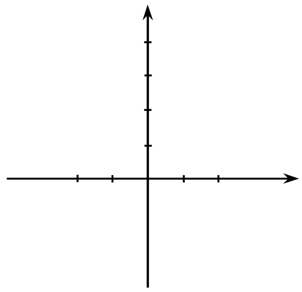
【觀念】**指數函數的定義：**

設$a>0$，則$f(x)=a^x$，稱為以a為底數的指數函數。

以底數a的範圍討論，其圖形可分為下列三型：

(第一型)$a>1$，例：$y=f(x)=2^x$

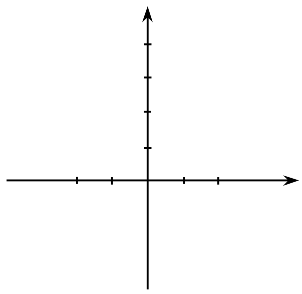
x	-2	-1	0	1	2
y					



《圖形特徵》①必過$(0,1)$　②凹向上　③嚴格遞增
④函數值恆正 ⑤x軸為漸近線

(第二型)$0<a<1$，例：$y=f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

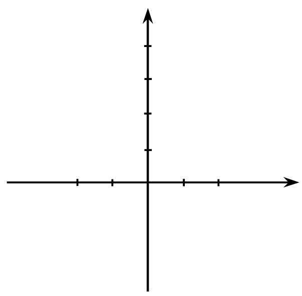
x	-2	-1	0	1	2
y					



《圖形特徵》①必過$(0,1)$　②凹向上　③嚴格遞減
④函數值恆正　⑤x軸為漸近線

(第三型)$a=1$，例：$y=f(x)=1^x$

x	-2	-1	0	1	2
y					

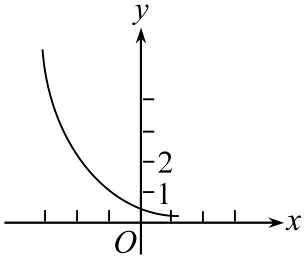


<u>Note</u>：①$a>0$，$f(x)=a^x$，x可為任意實數，而函數值則必為正實數，所以指數函數的定義域為$\mathbb{R}$，對應域為$\mathbb{R}^+$

②以上三型，皆滿足$f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$

<u>例4</u>

右圖為函數 $y=a+b^{x}$ 之部分圖形，其中 a，b 為常數，則下列何者為真？



(A) $a<0$，$b>1$
(B) $a>0$，$b>1$
(C) $a=0$，$b>1$
(D) $a<0$，$0<b<1$
(E) $a>0$，$0<b<1$
答：(D)

小寬的叮嚀

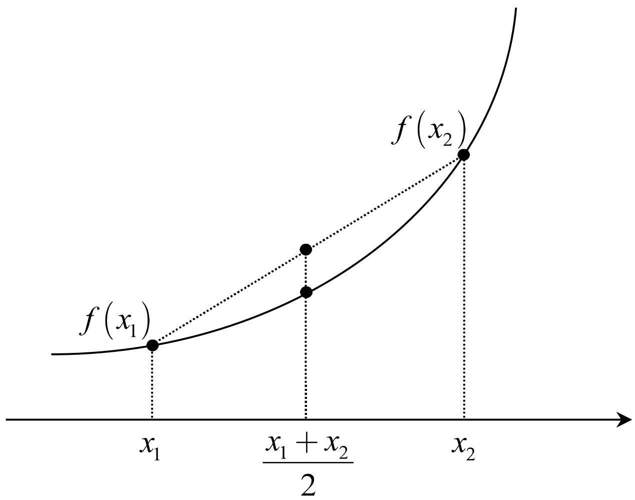
<u>例5</u>《凹向上性質》

求證：$f(x)=a^{x}, a>0, a\neq 1$，則 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\leq \dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$。

小寬的叮嚀
凹向上的直觀概念為：曲線上任取兩點，其割弦恆在曲線上方

pf：$a^{x_1}>0, a^{x_2}>0$，由算幾不等式

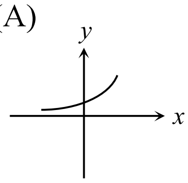
$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=\frac{a^{x_1}+a^{x_2}}{2}\geq\sqrt{a^{x_1}\cdot a^{x_2}}=\sqrt{a^{x_1+x_2}}=a^{\frac{x_1+x_2}{2}}=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$



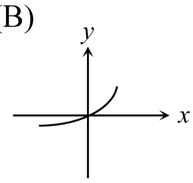
每　日　練　功

9. 若$a>0$且$a\neq 1$，則下列各圖形中，何者可能是指數函數$y=a^x$的部分圖形？

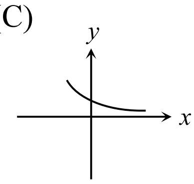
(A)



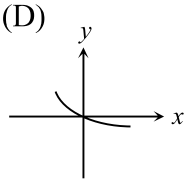
(B)



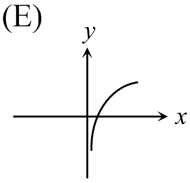
(C)



(D)



(E)



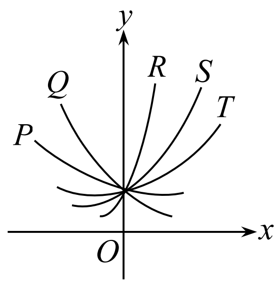
答：(A)(C)　　【87年日大社會組】

10. 設$y=4^x$，$y=3^x$，$y=2^x$，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

之圖形為右圖中五條曲線，則$y=2^x$之圖形為

(A) P　(B) Q　(C) R　(D) S　(E) T

答：(E)



11. 右圖A，B，C，D分別為指數函數$y=a^x$，

$y=b^x$，$y=c^x$與$y=d^x$的部分圖形，則

(A) $d<c<b<a$

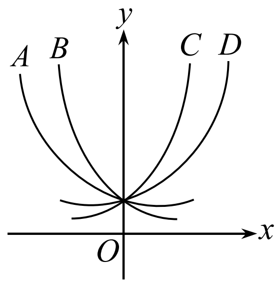
(B) $a<b<c<d$

(C) $a<b<d<c$

(D) $b<a<d<c$

(E) $b<a<c<d$

答：(D)



12. 設$0<a<1$，試問下列哪些是指數函數$f(x)=a^x$的特性？

(A)函數圖形通過點$(0,-1)$

(B)是一嚴格遞增函數

(C) x軸為函數圖形的漸近線

(D)函數圖形與直線$y=k$都恰有一交點

(E)函數圖形與直線$x=h$都恰有一交點

答：(C)(E)

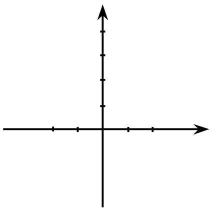
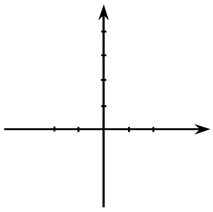
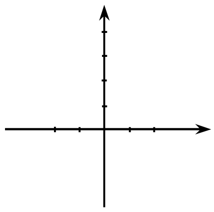
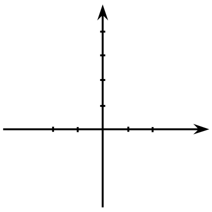
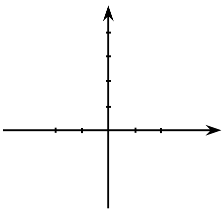
思考 4　指數作圖及應用

例1

試作以下圖形：

(1) $y=2^x$　(2) $y=2^{|x|}$　(3) $|y|=2^x$　(4) $|y|=2^{|x|}$　(5) $y=2^x+2^{-x}$

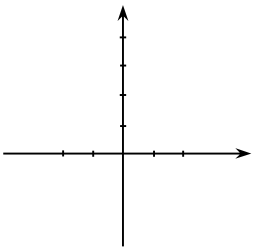
小寬的叮嚀

例2

試問方程式：$2^{-x}+x=2$ 之實根共有多少個？
答：2

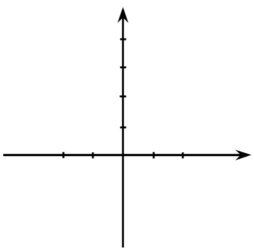
小寬的叮嚀



例3

$x^2=2^{-|x|}$ 有幾個實根？
答：2 個

小寬的叮嚀



例4 $y=2^x$ 與 $y=x^2$ 的圖形之交點共有______個。 答：3	小寬的叮嚀 另類問法：$2^x=x^2$ 有幾個實根？

✎

例5 設兩曲線 $y=\dfrac{3^x+3^{-x}}{4}$ 與 $y=\dfrac{a}{3^x+3^{-x}}$ 相交於 A,B 兩點，若 $\overline{AB}=2$，則 $a=$______。 答：$\dfrac{25}{9}$	小寬的叮嚀

✎

每　日　練　功

13. $2^x + x = 0$ 有幾個實根？

答：1 個

14. 方程式 $\frac{x}{2}+1=2^{-|x|}$ 有______個解。

答：2 個

15. 試由圖形判斷，$3^{-|x|}=x^2$ 有______個實數解。

答：2

16. 下列何者有兩個實根？

(A) $x^2=2^{-|x|}$　(B) $2^x=-x$　(C) $2^x=x^2$　(D) $5^{-x}=2-x$　(E) $5^{-x}=2+x$

答：(A)(D)

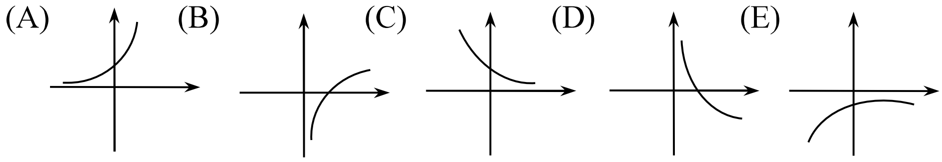
17. 觀察相關的函數圖形，判斷下列選項何者為真？

(1) $10^x=x$ 有實數解　(2) $10^x=x^2$ 有實數解　(3) x 為實數時，$10^x>x$ 恆成立

(4) $x>0$ 時，$10^x>x^2$ 恆成立　(5) $10^x=-x$ 有實數解

答：(2)(3)(4)(5)　　【91 年學測】

18. 若$0<a<1$，下列哪些有可能為$|y|=a^x$的「部分」圖形？______。(全對才給分)



答：(C)(E)

《挑戰題》

19. $f(x)=\left(5^x+5^{-x}\right)+3x$，$g(x)=m\left(7^x+7^{-x}\right)+3x$，已知$f(x)$和$g(x)$的圖形相交於$P$、$Q$兩點，且$\overline{PQ}=2\sqrt{10}$，試求$m$之值=______。

答：$\dfrac{91}{125}$

$\boxed{解}$：

聯立$\begin{cases} y=5^x+5^{-x}+3x \\ y=m\left(7^x+7^{-x}\right)+3x \end{cases}$，令交點$P\left(a,f(a)\right)$，$Q\left(b,f(b)\right)$

兩式相減得$5^x+5^{-x}-m\left(7^x+7^{-x}\right)=0$　$\therefore 5^x+5^{-x}=m\left(7^x+7^{-x}\right)$其兩根為$a$、$b$

$\because \begin{cases} y=5^x+5^{-x} \\ y=m\left(7^x+7^{-x}\right) \end{cases}$圖形皆對稱$Y$軸　$\therefore b=-a$，不失一般性，令$a>0$

$\therefore P\left(a,5^a+5^{-a}+3a\right)$，$Q\left(-a,5^{-a}+5^a-3a\right)$

$\overline{PQ}=\sqrt{(2a)^2+(6a)^2}=2\sqrt{10}$　$\Rightarrow a=1$，$m=\dfrac{5^1+5^{-1}}{7^1+7^{-1}}=\dfrac{91}{125}$

思考 5　指數不等式

【觀念】①若 $a>1$　，則 $a^x>a^y \Leftrightarrow x>y$ ②若 $0<a<1$，則 $a^x>a^y \Leftrightarrow x<y$	Note：

例1 $(1.1)^{x^2-2x-4}>(1.1)^{-1}$ 答：$x>3$ 或 $x<-1$	小寬的叮嚀

Ex 解不等式 $2^{x^2-2x-15}<4^{x+3}$

答：$-3<x<7$

例2 $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-3x-2}\geq 0.04$ 之 x 解為______。 答：$-1\leq x\leq 4$	小寬的叮嚀

Ex 解不等式 $(0.3)^{x^2-2x-1}>0.09$

答：$-1<x<3$

例3

設$x\in\mathbb{R}$，解指數不等式：$2^x+2^{1-x}<3$，得解為______。

答：$0<x<1$

小寬的叮嚀

✐

例4

試求解不等式$2^{3x-2}+5\cdot2^{x-2}+1<11\cdot2^{2x-3}$，得$x$的範圍為______。

答：$1<x<2$

小寬的叮嚀

✐

Ex 試求解不等式$27^x-4\cdot3^{2x-1}+3^{x-1}<0$，得$x$的範圍為______。

答：$-1<x<0$

例5

試求解不等式$\left(3^x-3\right)\left(9^x-3\right)\left(81^x-3\right)<0$，得$x$的範圍為______。

答：$x<\dfrac{1}{4}$或$\dfrac{1}{2}<x<1$

小寬的叮嚀

原式$\Rightarrow\left(3^x-3\right)\cdot\underline{\left(3^x-\sqrt{3}\right)\cancel{\left(3^x+\sqrt{3}\right)}}\cdot\underline{\left(3^x-\sqrt[4]{3}\right)\cancel{\left(3^x+\sqrt[4]{3}\right)}\cancel{\left(9^x+\sqrt{3}\right)}}<0$

$\Rightarrow3^x<\sqrt[4]{3}$ 或 $\sqrt{3}<3^x<3$

$\Rightarrow x<\dfrac{1}{4}$ 或 $\dfrac{1}{2}<x<1$

例6	小寬的叮嚀
$x>0$，$x^{x^2-3}\geq\left(x^x\right)^2$，求 x 範圍。 答：$0<x\leq 1$ 或 $x\geq 3$	

Ex 設 $x>0$，試解不等式 $x^{2x^2-5x+3}>x$。

答：$x>2$ 或 $\frac{1}{2}<x<1$

每　日　練　功

20. 不等式 $(0.1)^{x^2-3x}>0.0001$ 之解為______。

答：$-1<x<4$

21. 試求解不等式 $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-\frac{5}{2}x}>0.125$，得 x 的範圍為______。

答：$\frac{-1}{2}<x<3$

22. 指數不等式$\frac{1}{81}<\left(\frac{1}{9}\right)^{4x}\leq 3$的解為______。

答：$\frac{-1}{8}\leq x<\frac{1}{2}$

23. 解不等式$2^{2x+1}-33\cdot 2^{x-2}+1>0$，得$x$的範圍為______。

答：$x>2$或$x<-3$

24. 解不等式$3^{2x-1}-84\cdot 3^{x-3}+1<0$，得______。

答：$-1<x<2$

25. 試求解不等式$2^{x+1}+2^{2-x}-6<0$，得x的範圍為______。

答：$0<x<1$

26. 試求解不等式$2^{\frac{1}{2}+x}+2^{\frac{1}{2}-x}>3$，得$x$的範圍為______。

答：$x<\frac{-1}{2}$或$x>\frac{1}{2}$

27. 試求解不等式$12^x-8\cdot3^x+4^x-8\le0$，得x的範圍為______。

答：$x\le\frac{3}{2}$

28. 試求解不等式$4\cdot8^{x-1}+3\cdot2^{x-1}>1+3\cdot2^{2x-1}$，得$x$的範圍為______。

答：$x>1$

29. Ex 試求解不等式$\left(2^x-2\right)\left(2^x-8\right)>0$，得$x$的範圍為______。

答：$x<1$或$x>3$

30. 試求解不等式$\left(2^x-2\right)\left(4^x-2\right)\left(8^x-2\right)\left(16^x-2\right)<0$，得$x$的範圍為______。

答：$\frac{1}{4}<x<\frac{1}{3}$或$\frac{1}{2}<x<1$

31. 試求解不等式$\left[\left(\frac{1}{3}\right)^x-3\right]\left[\left(\frac{1}{9}\right)^x-27\right]\left[\left(\frac{1}{27}\right)^x-81\right]<0$，得$x$的範圍為______。

答：$\frac{-3}{2}<x<\frac{-4}{3}$或$x>-1$

《挑戰題》

32. 設常數$a>0$且$a\neq 1$，若不等式$a^{ax-10}>a^{-x+2a^2}$的解為$x>7$，則實數a的值為______。
答：3