

思考 1 奇偶性分析

【觀念一】奇數與偶數：

- (1) 偶數：可以被 2 整除的整數
- (2) 奇數：不可以被 2 整除的整數（餘數為 1 者）

【觀念二】奇偶性運算：

- ① 奇 ± 奇 =
- ② 奇 ± 偶 =
- ③ 偶 ± 偶 =
- ④ 奇 × 奇 =
- ⑤ 奇 × 偶 =
- ⑥ 偶 × 偶 =

Note：

0 為任何數的倍數，
所以 0 為偶數

例 1

試證：對整數 a, b, c ，若 $a^2 + b^2 = c^2$ ，則三者中至少有一個是偶數。

小寬的叮嚀



例 2

將 $1, 2, 3, \dots, 9$ 等 9 個數字，打散後重新排列，令排列後第 1 個數字為 a_1 ，第 2 個數字為 a_2 ，……第 9 個數字為 a_9 ，試證：

$(a_1 + 1)(a_2 + 2)(a_3 + 3) \cdots (a_9 + 9)$ 為偶數。

小寬的叮嚀



例3

小寬的叮嚀

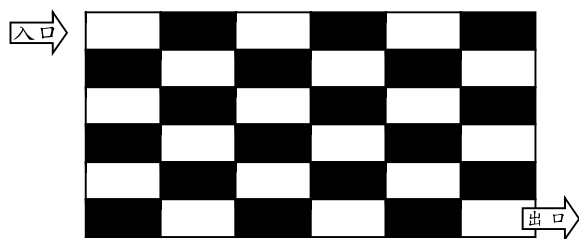
$$\begin{cases} a \times b \times c - a = 135 \\ a \times b \times c - b = 357 \\ a \times b \times c - c = 579 \end{cases} \text{ 是否有整數解?}$$



例4

小寬的叮嚀

某博物館有 36 個展室，如下圖所示。每兩個相鄰的展室之間都有門相通。試問：能否從入口進去不重覆地參觀完全部的展室後，從出口出來？



例5

小寬的叮嚀

在 \overline{AB} 上任意取 49 個點將 \overline{AB} 分成 50 個小線段，再隨意用 A 或 B 來標記這 49 個分點，我們發現所有這 50 個小線段中，兩端字母不同的線段數必為奇數，試證明之。



例6

小寬的叮嚀

有 7 個杯子杯口朝上，若每次任取四個杯子翻轉，試問：不斷的操作之下，能否使 7 個杯子開口同時朝下？



每日練功

1. 證明： a, b, c 為奇數，則方程式 $ax^5 + bx^2 + c = 0$ 沒有整數根。

pf:

2. 建國中學舉辦乒乓球單打賽，有 5 人參賽，能否制定某種賽程使每個選手剛好參加 3 場比賽？為什麼？

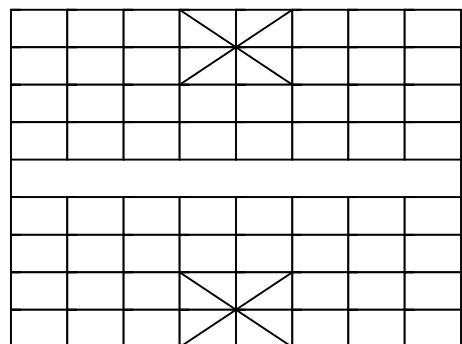
答：否，因為每人參加 3 場，總人次 15 為奇數，但每場比賽兩人，總人次應為偶數

3. 如圖，一所房子中共有 9 個房間，每個房間都與隔壁的房間相通，圖中的數字表示房間的號碼。試問能否從 1 號房間開始，不重覆地走遍所有房間又回到 1 號房間？

1	2	3
4	5	6
7	8	9

答：否

4. 在中國象棋中馬的走法為日字形，若馬在棋盤中的任何一個位置，則這隻馬跳了許多步後回到了原處。問：這隻馬所跳的次數是奇數還是偶數？



答：偶數