

## 泰勒名言：

不是去記住，但是要去瞭解。  
我不能記住任何一件事，如果我不瞭解它的話。

=====氫彈之父泰勒博士訪華=====

於民國 70 年 11 月 25 日在台大物理系館  
演講後，回答現代台灣學生所問的問題：

「記住所有的公式（方程式），是很重要的嗎？」

## 高一下 三角

思考 1	銳角三角函數 .....	2
思考 2	特別角與值域 .....	12
思考 3	三角函數的四個基本關係 .....	20
思考 4	特殊求值分析 .....	25
思考 5	簡易測量 .....	30
思考 6	廣義角 .....	38
思考 7	廣義角三角函數 .....	41
思考 8	極坐標 .....	47
思考 9	正餘轉化法 .....	49
思考 10	廣義角知一求五 .....	51
思考 11	第 $k$ 象限角的判斷 .....	53
思考 12	三角級數 .....	55
思考 13	$\tan$ 轉化法 .....	57
思考 14	三角極值（平方轉化與值域限制） .....	60
思考 15	正弦定理 .....	62
思考 16	投影定理 .....	66
思考 17	餘弦定理 .....	67
思考 18	$\triangle$ 面積公式 .....	73
思考 19	$\triangle$ 分析 .....	77
思考 20	中線分析 .....	82
思考 21	角平分線分析 .....	85
思考 22	三高分析 .....	88
思考 23	$\triangle$ 邊長與鈍銳角判斷 .....	89
思考 24	$\triangle$ 形狀判斷 .....	91
思考 25	四邊形問題 .....	93
思考 26	一般測量 .....	98

## 思考 1 銳角三角函數

【觀念一】銳角三角函數的定義：

(1) 正弦函數  $\sin \theta = \frac{\text{對}}{\text{斜}}$

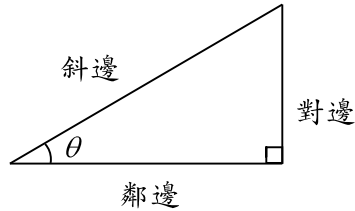
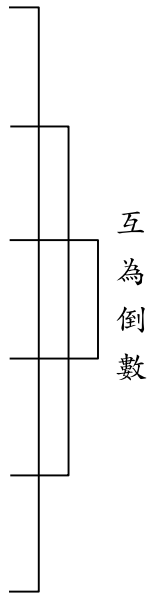
(2) 餘弦函數  $\cos \theta = \frac{\text{鄰}}{\text{斜}}$

(3) 正切函數  $\tan \theta = \frac{\text{對}}{\text{鄰}}$

(4) 餘切函數  $\cot \theta = \frac{\text{鄰}}{\text{對}}$

(5) 正割函數  $\sec \theta = \frac{\text{斜}}{\text{鄰}}$

(6) 餘割函數  $\csc \theta = \frac{\text{斜}}{\text{對}}$



Note :

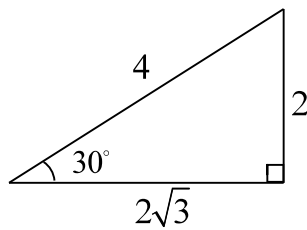
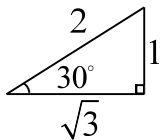
【觀念二】邊長的反應：

$$\frac{\text{對}}{\text{斜}} = \sin \theta \Rightarrow \text{對} =$$

$$\frac{\text{鄰}}{\text{斜}} = \cos \theta \Rightarrow \text{鄰} =$$

$$\frac{\text{對}}{\text{鄰}} = \tan \theta \Rightarrow \text{對} =$$

【觀念三】三角函數值與圖形大小無關



Note :

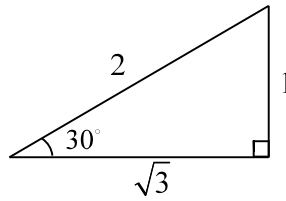
銳角三角函數的定義為直角三角形邊長的比值，所以三角形的大小並不影響三角函數值

立即訓練

(1)  $\sin 30^\circ = \underline{\quad}$ 。  $\csc 30^\circ = \underline{\quad}$ 。

$\cos 30^\circ = \underline{\quad}$ 。  $\sec 30^\circ = \underline{\quad}$ 。

$\tan 30^\circ = \underline{\quad}$ 。  $\cot 30^\circ = \underline{\quad}$ 。



(2)  $\sin 60^\circ = \underline{\quad}$ 。  $\csc 60^\circ = \underline{\quad}$ 。

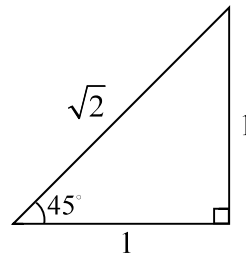
$\cos 60^\circ = \underline{\quad}$ 。  $\sec 60^\circ = \underline{\quad}$ 。

$\tan 60^\circ = \underline{\quad}$ 。  $\cot 60^\circ = \underline{\quad}$ 。

(3)  $\sin 45^\circ = \underline{\quad}$ 。  $\csc 45^\circ = \underline{\quad}$ 。

$\cos 45^\circ = \underline{\quad}$ 。  $\sec 45^\circ = \underline{\quad}$ 。

$\tan 45^\circ = \underline{\quad}$ 。  $\cot 45^\circ = \underline{\quad}$ 。



Note:

左邊特別角的三角函數值必須記起來直接反應

例1 《知一求五》

$\theta$  為銳角， $\sin \theta = k$ ，求其他三角函數值。

小寬的叮嚀

知一求五是基本功



例2 《定義考題》

在  $\triangle ABC$  中，若  $\angle C = 90^\circ$ ，且  $\overline{BC} = \frac{12}{13} \overline{AB}$ ，求  $\csc A \cos A + \sin A$  之值。

答： $\frac{209}{156}$

小寬的叮嚀

圖形大小不影響三角函數的值



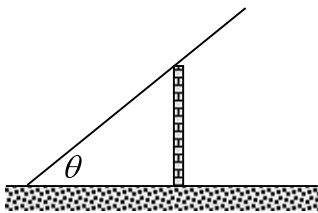
**例3 《邊長的反應》**

將一長 5 公尺之竹竿，斜靠在垂直地面而高為 3 公尺的牆頭，部分伸出牆外。假設竹竿與地成夾角  $\theta$ ，竹竿伸出牆外部分（牆的厚度不計）於日正當中時，在地面的影長為  $a \cot \theta + b \cos \theta$ ，其中  $a, b$  為常數，則  
 (1)  $a =$  (A) -5 (B) -4 (C) -3 (D) 3 (E) 5。  
 (2)  $b =$  (A) -5 (B) -3 (C) 3 (D) 4 (E) 5。 【74 年日大社會組】  
 答：(1)(C) (2)(E)

小寬的叮嚀

鄰：斜 =  $\cos$

鄰：對 =  $\cot$



竹竿影長 =

牆內影長 =

牆外影長 =

**例4 《邊長的反應》**

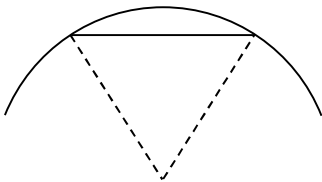
設半徑為  $r$  之圓內接正  $n$  邊形的面積為  $W$ ，周長為  $T$ ，則  $W =$  \_\_\_\_\_， $T =$  \_\_\_\_\_。

答：  $W = nr^2 \sin \frac{180^\circ}{n} \cos \frac{180^\circ}{n}$ ， $T = 2nr \sin \frac{180^\circ}{n}$

小寬的叮嚀

對：斜 =  $\sin$

鄰：斜 =  $\cos$



任一邊所對的圓心角 =

邊長 =

高 =

面積 =

周長 =

**例5 《邊長的反應》**

在地面某定點測得數公里外高塔塔尖的仰角為  $\theta_1$ ，朝高塔方向沿直線前進 100 公尺之後，重新測得塔尖仰角為  $\theta_2$ ，再沿同一直線繼續前進 100 公尺後，測得仰角為  $\theta_3$ 。請問下列哪一個選項的數值依序成等差數列？

(1)  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  (2)  $\sin \theta_1, \sin \theta_2, \sin \theta_3$  (3)  $\cos \theta_1, \cos \theta_2, \cos \theta_3$

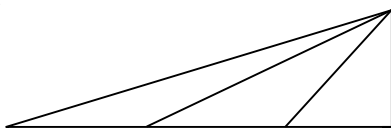
(4)  $\tan \theta_1, \tan \theta_2, \tan \theta_3$  (5)  $\cot \theta_1, \cot \theta_2, \cot \theta_3$

【103 年指考甲】

答：(5)

小寬的叮嚀

找出是哪一個邊成等差，哪一個邊是定值，兩者相除還是等差



**例6** 《銳角三角函數的單位圓定義》

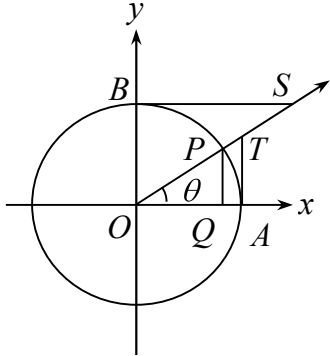
下圖表一單位圓，其中  $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ，  
試以  $\theta$  的銳角三角函數值表示下列各線段：

(1)  $\overline{PQ}$  = \_\_\_\_\_。 (2)  $\overline{OQ}$  = \_\_\_\_\_。 (3)  $\overline{AT}$  = \_\_\_\_\_。

答：(1)  $\sin \theta$  (2)  $\cos \theta$  (3)  $\tan \theta$

小寬的叮嚀

注意角度增減各線段長度的變化



$$\overline{PQ} = \frac{\overline{PQ}}{1} =$$

$$\overline{OQ} = \frac{\overline{OQ}}{1} =$$

$$\overline{AT} = \frac{\overline{AT}}{1} =$$

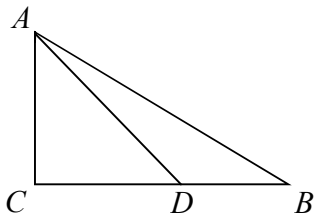
**例7** 《輔助線雜題》

$\triangle ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{AC} : \overline{BC} = 3 : 5$ ， $D$  為  $\overline{BC}$  邊上的內分點，且  $\overline{BD} : \overline{CD} = 2 : 3$ ， $\angle BAD = \theta$ ，則  $\tan \theta =$  \_\_\_\_\_。

答： $\frac{1}{4}$

小寬的叮嚀

以後會有和角公式來解決這個問題，短時間內我們先用輔助線解決



**例8** 《輔助線雜題》

設四點  $A-B-C-D$ ，且  $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CD} = 2 : 3 : 1$ ，以  $\overline{BC}$  為直徑作圓，取圓上異於  $B, C$  的點  $P$ ，則  $(\tan \angle APB) \times (\tan \angle CPD) = ?$

答： $\frac{1}{10}$

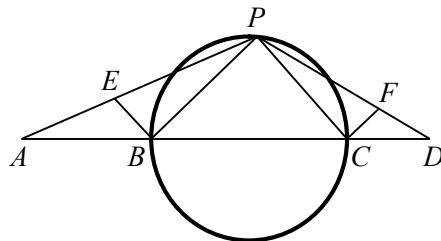
小寬的叮嚀

我個人不是很喜歡這種技巧題

如圖，作  $\overline{BE} \parallel \overline{PC}$ ， $\overline{CF} \parallel \overline{PB}$ ，

則  $\angle EBP = \angle BPC = \angle FCP = 90^\circ$

$$\begin{aligned} (\tan \angle APB) \times (\tan \angle CPD) &= \frac{\overline{BE}}{\overline{BP}} \times \frac{\overline{CF}}{\overline{CP}} \\ &= \frac{\overline{BE}}{\overline{CP}} \times \frac{\overline{CF}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \times \frac{\overline{DC}}{\overline{DB}} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

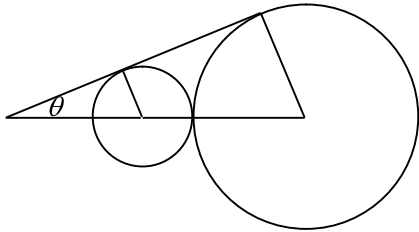


例9 《輔助線雜題》

小寬的叮嚀

設半徑為4，9的二圓外切，設其外公切線交角 $2\theta$ ，求 $\sin\theta = ?$

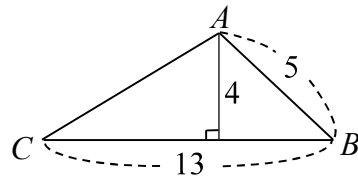
答： $\frac{5}{13}$



每日練功

1. 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 5$ ， $\overline{BC} = 13$ ， $\overline{AD}$ 是 $\overline{BC}$ 邊上的高且 $\overline{AD} = 4$ ，求：  
(1)  $\overline{CD} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(2)  $\sin C = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答：(1)10 (2) $\frac{2\sqrt{29}}{29}$



2.  $\triangle ABC$ 三邊長 $\overline{BC} = a$ 、 $\overline{CA} = b$ 、 $\overline{AB} = c$ ， $2a:b = 10:13$ ， $2a:c = 5:6$ ，則 $\sin A = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答： $\frac{5}{13}$

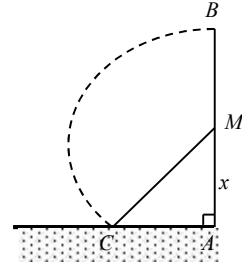
3. 在直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{AC} = 15$ ， $\overline{AB} = 17$ ，則 $\angle A$ 的三角函數值以  
(1)  $\sin A$  (2)  $\cos A$  (3)  $\tan A$  (4)  $\cot A$  最接近於1。

答：(2)

4. 一棵樹的樹幹被颱風吹斷，樹頂垂落在地上，樹的頂部與樹根相距5公尺，被折的樹幹與地面夾角 $30^\circ$ ，此棵樹原高度？

答： $5\sqrt{3}$ 公尺

5. 如圖，將一根長30公分的鐵絲 $\overline{AB}$ 直立於牆角。 $M$ 為 $\overline{AB}$ 上一點，自 $M$ 向下彎折使另一端點 $B$ 著地，其著地點為 $C$ 而得 $\triangle CAM$ 。設 $\overline{AM} = x$ 公分，問：
- (1)  $x$ 的範圍為\_\_\_\_\_。(2)  $\sin C =$ \_\_\_\_\_。
- (3) 若 $\angle C = 30^\circ$ ，則 $x$ 的值是\_\_\_\_\_。



答：(1)  $0 < x < 15$  (2)  $\frac{x}{30-x}$  (3) 10

6. 設 $\angle A$ 為銳角，若 $\sin A = \frac{1}{3}$ ，則 $16 \tan A - 3 \cos A$ 的值=\_\_\_\_\_。

答： $2\sqrt{2}$

7. 設 $\angle A$ 為銳角，且 $\frac{\tan A + 1}{\tan A - 1} = 3$ ，試求 $2 \cos A + 4 \sin A$ 之值=\_\_\_\_\_。

答： $2\sqrt{5}$

8. 設 $\theta$ 為銳角， $\tan \theta = x$ ，試用 $x$ 表出 $\sin \theta =$ \_\_\_\_\_。

答： $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

9. 設 $\cos A = \frac{2mn}{m^2 + n^2}$ ，且 $m \geq n$ ，則 $\tan A =$ \_\_\_\_\_。

答： $\frac{m^2 - n^2}{2mn}$

10.  $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\sin A = \frac{4}{5}$ ， $\overline{BC} = 20$ 公分，求

(1)  $\triangle ABC$ 的周長=\_\_\_\_\_公分。(2)  $\triangle ABC$ 的面積=\_\_\_\_\_平方公分。

答：(1) 60 (2) 150

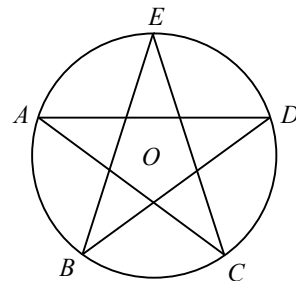
11. 設  $\triangle ABC$  的三頂點  $A, B, C$  所對邊的邊長分別為  $a, b, c$ ， $\overline{AH}$  為高，則  $\overline{AH}$  之長為  
 (A)  $b \cdot \sin B$  (B)  $c \cdot \sin C$  (C)  $b \cdot \sin C$  (D)  $c \cdot \sin B$  (E)  $a \cdot \sin A$ 。  
 答：(C)(D) 【88 年學科能力測驗】

12. 有一等腰三角形底邊為 10，頂角  $72^\circ$ 。下列何者可以表示腰長？  
 (A)  $5 \cdot \sin 36^\circ$  (B)  $5 \cdot \tan 36^\circ$  (C)  $5 \cdot \cot 36^\circ$  (D)  $5 \cdot \sec 36^\circ$  (E)  $5 \cdot \csc 36^\circ$ 。  
 答：(E) 【89 年學科能力測驗】

13. 設半徑為  $r$  之圓外切正  $n$  邊形的面積為  $K$ ，周長為  $L$ ，則  
 (A)  $K = nr^2 \tan \frac{180^\circ}{n}$  (B)  $K = nr^2 \cot \frac{180^\circ}{n}$  (C)  $K = nr^2 \sec \frac{180^\circ}{n}$  (D)  $L = 2nr \sin \frac{180^\circ}{n}$   
 (E)  $L = 2nr \tan \frac{180^\circ}{n}$ 。  
 答：(A)(E)

14.  $\triangle ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\overline{AC} : \overline{BC} = 2 : 3$ ， $D$  為  $\overline{BC}$  邊上的內分點，且  $\overline{BD} : \overline{CD} = 1 : 2$ ， $\angle BAD = \theta$ ，則  $\tan \theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。  
 答： $\frac{1}{5}$

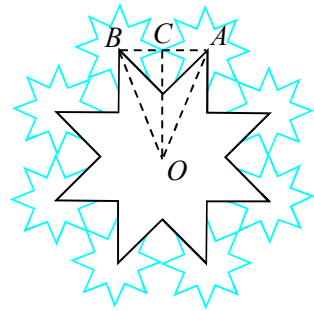
15. 已知正五角星（即  $ABCDE$  為正五邊形）內接於一圓  $O$ ，如右圖所示。若  $\overline{AC} = 1$ ，則圓  $O$  的半徑為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。  
 $\left( \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \right)$



- 答： $\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}$  【90 年日大社會組】



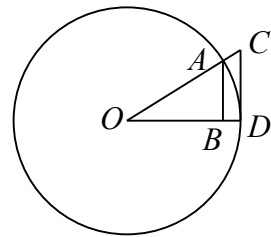
16. 如圖所示，一個大的正八角星的頂點為周圍八個全等的小正八角星中心，相鄰的兩個小八角星有一個共同的頂點。觀察圖中虛線部分，設小八角星頂點  $C$  到其中心  $A$  的距離為  $a$ ，大八角星頂點  $A$  到其中心  $O$  的距離為  $b$ 。試問  $a:b$  的比值為\_\_\_\_\_。



答： $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$

【91 年指考乙】

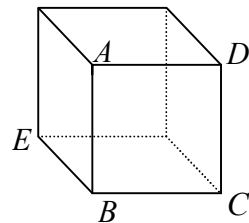
17. 設圓  $O$  之半徑為 24， $\overline{OC} = 26$ ， $\overline{OC}$  交圓  $O$  於  $A$  點， $\overline{CD}$  切圓  $O$  於  $D$  點， $B$  為  $A$  點到  $\overline{OD}$  的垂足，如右邊的示意圖。則  $\overline{AB} =$ \_\_\_\_\_。(化為最簡分數)



答： $\frac{120}{13}$

【103 年學測】

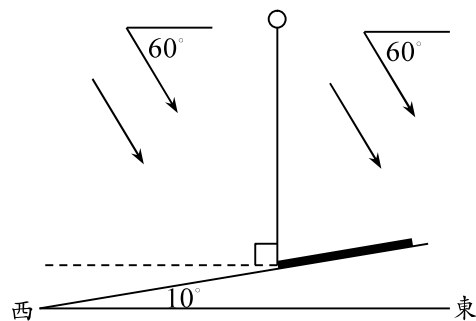
18. 空間中一長方體如下圖所示，其中  $ABCD$  為正方形， $\overline{BE}$  為長方體的一邊。已知  $\cot \angle AEB = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ ，則  $\cot \angle CED =$ \_\_\_\_\_。



答： $\frac{7}{5}$

【100 年學測】

19. 在與水平面成  $10^\circ$  的東西向山坡上，鉛直（即與水平面垂直）立起一根旗竿。當陽光從正西方以俯角  $60^\circ$  平行投射在山坡上時，旗竿的影子長為 11 公尺，如下圖所示（其中箭頭表示陽光投射的方向，而粗黑線段表示旗竿的影子）。



試問旗竿的長度最接近以下哪一選項？

- (1)19.1 公尺 (2)19.8 公尺 (3)20.7 公尺 (4)21.1 公尺 (5)21.7 公尺

參考數值： $\sin 10^\circ \approx 0.174$ ， $\sin 20^\circ \approx 0.342$ ， $\cos 10^\circ \approx 0.985$ ， $\cos 20^\circ \approx 0.940$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ 。

答：(3)

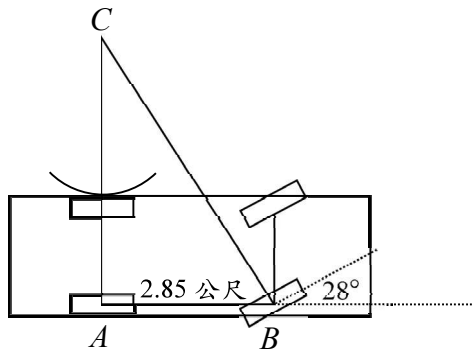
【97 年指考甲】

20. 下圖為汽車迴轉示意圖。汽車迴轉時，將方向盤轉動到極限，以低速讓汽車進行轉向圓周運動，汽車轉向時所形成的圓周的半徑的就是迴轉半徑，如圖中的 $\overline{BC}$ 即是。已知在低速前進時，圖中 $A$ 處的輪胎行進方向與 $\overline{AC}$ 垂直， $B$ 處的輪胎行進方向與 $\overline{BC}$ 垂直。在圖中，已知軸距 $\overline{AB}$ 為2.85公尺，方向盤轉到極限時，輪子方向偏了 $28^\circ$ ，試問此車的迴轉半徑 $\overline{BC}$ 為\_\_\_\_\_公尺。

(小數點後第一位以下四捨五入， $\sin 28^\circ \approx 0.4695, \cos 28^\circ \approx 0.8829$ )

答：6.1

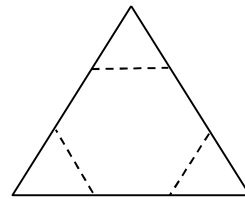
【104年學測】



21. 一個正三角形的面積為36，今截去三個角(如右圖所示)，使成為正六邊形，此正六邊形的面積為\_\_\_\_\_。

答：24

【88年推薦甄選】



22. 一正方形邊長為4，今截入四個角使成正八邊形，則此正八邊形之邊長為\_\_\_\_\_。

答： $4\sqrt{2} - 4$

23. 有一邊長為3的正六邊形紙板，今在每一個角各剪掉一個小三角形，使其成為正十二邊形之紙板，則此正十二邊形之一邊長為

(A) 1 (B)  $\frac{3}{2}$  (C)  $\sqrt{3}$  (D)  $\frac{3\sqrt{3}-3}{2}$  (E)  $6\sqrt{3}-9$ 。

答：(E)

【86年推薦甄選】

24.  $\triangle ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A = 30^\circ$ ， $\overline{AB} = 2$ ， $\angle A$  之分角線交  $\overline{BC}$  於  $D$  點，則  
 (1)  $\overline{BD} = ?$  (2)  $\overline{CD} = ?$   
 答：(1)  $4 - 2\sqrt{3}$  (2)  $2\sqrt{3} - 3$
25. 若直線  $3x - 4y + 12 = 0$  與  $x$  軸交於  $A$ ，與  $y$  軸交於  $B$ ， $O$  為原點，設  $\angle ABO = \theta$ ，則：  
 (1)  $\sin \theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 (2)  $\tan \theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 (3)  $\tan \frac{\theta}{2} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。  
 答：(1)  $\frac{4}{5}$  (2)  $\frac{4}{3}$  (3)  $\frac{1}{2}$
26. 某機場基於飛航安全考量，限制機場附近建築物從機場中心地面到建築物頂樓的仰角不得超過  $8^\circ$ 。某建築公司打算在離機場中心 3 公里且地表高度和機場中心一樣高的地方蓋一棟平均每樓層 5 公尺高的大樓。在符合機場的限制規定下，該大樓在地面以上最多可以蓋        層樓。  
 (參考數據： $\sin 8^\circ \approx 0.1392, \cos 8^\circ \approx 0.9903, \tan 8^\circ \approx 0.1405$ )  
 答：84 【95 年指考乙】

### 《挑戰題》

27. 設  $H$  為銳角三角形  $ABC$  的垂心（三高之交點），若以  $c$  表線段  $\overline{AB}$  之長，則線段  $\overline{AH}$  之長等於  
 (A)  $c \cos A \sin C$  (B)  $c \cos A \cos C$  (C)  $c \cos A \tan C$  (D)  $c \cos A \sec C$  (E)  $c \cos A \csc C$ 。  
 答：(E) 【89 年日大自然組】
28. 設  $P$  為銳角  $\triangle ABC$  的外心，若點  $P$  到  $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$  的距離依次為  $x, y, z$ ，則  $x : y : z =$   
 (A)  $\sin A : \sin B : \sin C$  (B)  $\cos A : \cos B : \cos C$  (C)  $\tan A : \tan B : \tan C$   
 (D)  $\cot A : \cot B : \cot C$  (E)  $\sec A : \sec B : \sec C$   
 答：(B)

## 思考 2 特別角與值域

【觀念一】需記憶的特別角：

	0°	30°	45°	60°	90°	走勢
sin	0				1	遞增
cos	1				0	遞減
tan	0				不存在	遞增
cot	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	遞減
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	不存在	遞增
csc	不存在	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	遞減

	15°	18°	36°	22.5°
sin				
cos				
tan				

【觀念二】銳角三角函數的值域：

① 銳角三角函數為邊長的比值，故銳角的三角函數值皆正。

$$\textcircled{2} \quad 0^\circ < \theta < 90^\circ, \begin{cases} 0 < \sin \theta, \cos \theta < 1 \\ \tan \theta, \cot \theta > 0 \\ \sec \theta, \csc \theta > 1 \end{cases}$$

③ 銳角三角正函數皆為遞增，餘函數皆為遞減，45° 時正餘相同。

$$\therefore \begin{cases} 0^\circ < \theta < 45^\circ, \sin \theta \text{ \_\_\_\_\_\_ } \cos \theta \\ 45^\circ < \theta < 90^\circ, \sin \theta \text{ \_\_\_\_\_\_ } \cos \theta \end{cases}$$

Note :

雖然現行學測會給特別角的三角函數值，但是段考可不會，大家還是得熟記左方表格

**例1** 《圖解技巧》

小寬的叮嚀

求  $\sin 15^\circ$ ,  $\cos 15^\circ$

先做個兩倍角度的三角形

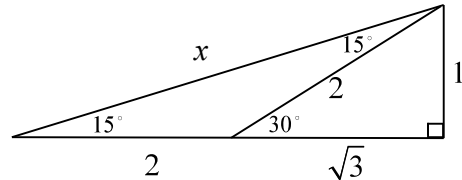


$$x^2 = 1^2 + (2 + \sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{8 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{8 + 2\sqrt{12}} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

$$\therefore \sin 15^\circ = \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$



**例2** 《圖解技巧》

小寬的叮嚀

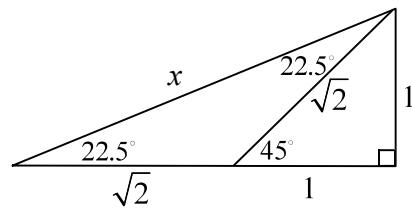
求  $\sin 22.5^\circ$ ,  $\cos 22.5^\circ$



$$x^2 = 1^2 + (1 + \sqrt{2})^2 \Rightarrow x = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$$

$$\therefore \sin 22.5^\circ = \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos 22.5^\circ = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$



**例3** 《圖解技巧》

小寬的叮嚀

求  $\sin 18^\circ$ ,  $\cos 36^\circ$

如右圖一所示，

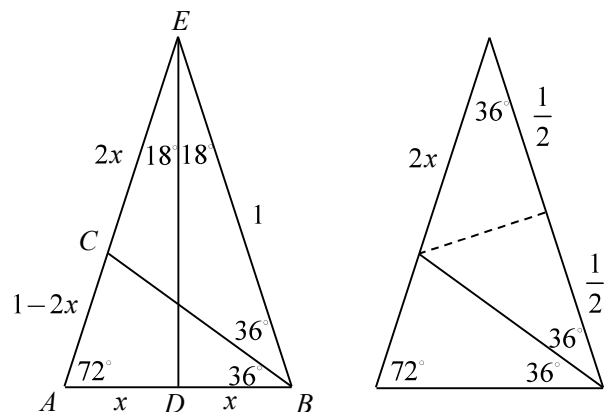
$$\because \triangle ABC \sim \triangle BEA$$

$$\therefore \frac{1-2x}{2x} = \frac{2x}{1}$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \sin 18^\circ$$

$$\text{由右圖二，} \cos 36^\circ = \frac{1}{2x} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$$




例4 《值域》

小寬的叮嚀

設 $\angle A$ 為銳角，且 $2\sin^2 A - 5\sin A + 2 = 0$ ，則下列何者正確？

(1)  $\sin A = 2$  (2)  $\cos A = \frac{1}{2}$  (3)  $\tan A = \sqrt{3}$  (4)  $\cot A = \sqrt{3}$ 。

答：(4)


  $2\sin^2 A - 5\sin A + 2 = 0 \Rightarrow \sin A = \frac{1}{2}$  或  $2$  (不合)

例5 《值域》

小寬的叮嚀

設 $\angle A$ 為銳角，若 $y = \tan^2 A - 2\sqrt{3}\tan A - 4$ ，則 $y$ 之最小值為\_\_\_\_\_。

答：-7

  $y = (\tan A - \sqrt{3})^2 - 7 \quad \because \tan A > 0 \quad \therefore y$ 之最小值為-7

例6

小寬的叮嚀

設 $\theta$ 為銳角，且 $\sqrt{3}\sin\theta \geq \cos\theta$ ，則 $\theta$ 角的範圍是\_\_\_\_\_。

答： $30^\circ \leq \theta < 90^\circ$



例7 《比較大小》

小寬的叮嚀

在下列各空格中填入“>”、“=”、“<”：

(1)  $\sin 49^\circ$  \_\_\_\_\_  $\sin 51^\circ$  (2)  $\csc 19^\circ$  \_\_\_\_\_  $\csc 20^\circ$

(3)  $\sin 48^\circ$  \_\_\_\_\_  $\cos 42^\circ$  (4)  $\sec 31^\circ$  \_\_\_\_\_ 1

(5)  $\cos 16^\circ$  \_\_\_\_\_  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  (6)  $\tan 33^\circ$  \_\_\_\_\_ 1

銳角三角中，正函數皆為遞增，餘函數皆為遞減



每日練功

29. 試求  $(1 + \sin 30^\circ + \sin 45^\circ)(1 - \cos 45^\circ + \cos 60^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答：  $\frac{7}{4}$

30.  $\sin 60^\circ - \cos^2 60^\circ + \tan 45^\circ - \cos^2 30^\circ + \tan 60^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答：  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

31.  $\frac{\sin 30^\circ + \sin 45^\circ}{\sin 45^\circ + \sin 60^\circ}$  之值為  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

答：  $\sqrt{3} + \sqrt{6} - \sqrt{2} - 2$

32. 試求  $\frac{\sin 30^\circ - \sin 45^\circ + \sin 60^\circ}{\sin 30^\circ + \sin 45^\circ + \sin 60^\circ} - \frac{\cos 30^\circ + \cos 45^\circ - \cos 60^\circ}{\cos 30^\circ - \cos 45^\circ - \cos 60^\circ} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答：  $2\sqrt{3}$

33.  $\frac{1}{\sin 30^\circ + \sin 45^\circ + \sin 60^\circ} - \frac{2}{\sin 30^\circ - \sin 45^\circ + \sin 60^\circ} + \frac{3}{\sin 30^\circ + \sin 45^\circ - \sin 60^\circ} = ?$

答：  $2 + 3\sqrt{2}$



$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin 30^\circ + \sin 45^\circ + \sin 60^\circ} - \frac{2}{\sin 30^\circ - \sin 45^\circ + \sin 60^\circ} + \frac{3}{\sin 30^\circ + \sin 45^\circ - \sin 60^\circ} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{2}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{3}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} - \frac{4}{1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{6}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}} \\ &= \frac{2}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} \times \frac{(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{3}} - \frac{4}{1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}} \times \frac{(1 - \sqrt{2}) - \sqrt{3}}{(1 - \sqrt{2}) - \sqrt{3}} + \frac{6}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}} \times \frac{(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{3}} \\ &= \frac{2 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 4 - 4\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 6 + 6\sqrt{2} + 6\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{12 + 4\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 2 + 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

34. 三數  $a = \sin 30^\circ \tan 30^\circ \sec 30^\circ$ 、 $b = \cos 45^\circ \cot 45^\circ \csc 45^\circ$ 、 $c = \sin 60^\circ \tan 60^\circ \sec 60^\circ$ ，則  $a$ 、 $b$ 、 $c$  由大而小為\_\_\_\_\_。  
答：  $c > b > a$

35. 設  $\sin 45^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^3 45^\circ + \cdots + \sin^{10} 45^\circ = S$ ，則  $S$  等於\_\_\_\_\_。  
答：  $\frac{31}{32}(1 + \sqrt{2})$

36. 直角  $\triangle ABC$  中， $\angle C = 90^\circ$ ，且  $3\sin^2 A - 11\sin A + 6 = 0$ ，則  $\tan A$  為\_\_\_\_\_。  
答：  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

37. 設  $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ， $6\sin^2 \theta + \sin \theta = 1$ ，則  $\cos \theta =$ \_\_\_\_\_。  
答：  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

38. 若  $\angle A$  為銳角，且  $2\cos^2 A + 5\sin A - 4 = 0$ ，求  $\angle A$ 。  
答：  $30^\circ$

39. 設  $\sec A$  為方程式  $2x^2 - 7x + 3 = 0$  的一根，則  $\sec A$  的值為  
(1) 3 (2)  $\frac{1}{2}$  (3) 3 或  $\frac{1}{2}$  (4) 無解。  
答： (1)

40. 設  $\angle A = 1^\circ$ ，則  $\angle A$  的六個三角函數值以\_\_\_\_\_最大。  
答：  $\csc A$



41. 下列何者正確？

(1)  $\tan 40^\circ > \cot 40^\circ$  (2)  $\sin 40^\circ > \cos 40^\circ$  (3)  $\csc 40^\circ > \sec 40^\circ$  (4)  $\sec 40^\circ > \csc 40^\circ$ 。

答：(3)

42. 下列何者為真？

(1)  $\sin 23^\circ - \sin 19^\circ < 0$  (2)  $1 - \sec 7^\circ > 0$  (3)  $\tan 53^\circ - \cot 53^\circ > 0$  (4)  $1 - \cos 3^\circ < 0$ 。

答：(3)

43. 下列哪一個值大於零？

(1)  $\cos 18^\circ - \cos 17^\circ$  (2)  $\sin 76^\circ - 1$  (3)  $\sin 38^\circ - \cos 38^\circ$  (4)  $\tan 50^\circ - 1$ 。

答：(4)

44. 下列何者為負數？

(1)  $\frac{2}{\sqrt{3}} - \csc 61^\circ$  (2)  $\frac{1}{2} - \cos 81^\circ$  (3)  $\tan 42^\circ - \cot 42^\circ$  (4)  $\sec 6^\circ - 1$ 。

答：(3)

45. 設  $X$  為銳角，且  $|\sin X - \cos X| = \sin X - \cos X$ ，則  $\sin X - \frac{1}{2}$  的值下列何者正確？

(1) 大於 0 (2) 等於 0 (3) 小於 0 (4) 無法確定。

答：(1)

46. 若  $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$  皆為銳角，且  $\tan A < \tan B < \tan C$ ，則  $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$  之大小關係為\_\_\_\_\_。

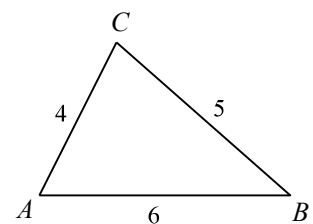
答： $A < B < C$

47. 如圖， $\triangle ABC$  是銳角三角形，

(1) 比較  $\cos A$ 、 $\cos B$ 、 $\cos C$  的大小為\_\_\_\_\_。

(2) 比較  $\tan A$ 、 $\tan B$ 、 $\tan C$  的大小為\_\_\_\_\_。

答：(1)  $\cos B > \cos A > \cos C$  (2)  $\tan C > \tan A > \tan B$



48. 設  $45^\circ < \theta < 60^\circ$ ， $a = \sin \theta$ ， $b = \cos \theta$ ， $c = \tan \theta$ ，則下列何者正確？

(1)  $a > b > c$  (2)  $b > c > a$  (3)  $a > c > b$  (4)  $c > a > b$ 。

答：(4)

49. 設  $a = \cos 20^\circ$ ， $b = \sin 40^\circ$ ， $c = \tan 70^\circ$ ，則

(1)  $b < c < a$  (2)  $a < b < c$  (3)  $c < a < b$  (4)  $b < a < c$ 。

答：(4)

50.  $a = \sin 25^\circ$ 、 $b = \tan 45^\circ$ 、 $c = \sec 65^\circ$ ，則  $a$ 、 $b$ 、 $c$  之間的關係為

(1)  $a > b > c$  (2)  $b > a > c$  (3)  $c > b > a$  (4)  $c > a > b$ 。

答：(3)

51. 點  $P(\cos 40^\circ - \sin 54^\circ, \tan 44^\circ - 1)$  在哪一象限內？

(1) 第一象限 (2) 第二象限 (3) 第三象限 (4) 第四象限。

答：(3)

52. 設  $0^\circ < \theta < 45^\circ$ ，則  $(\cos \theta - \sin \theta, \sec \theta - 1)$  之點在坐標平面上第\_\_\_\_\_象限。

答：一

53. 設  $0^\circ < \theta < 45^\circ$ ，則點  $(\sin \theta - \cos \theta, \cos \theta - \cot \theta)$  在坐標平面上的第\_\_\_\_\_象限內。

答：三

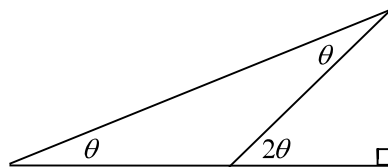
54.  $P(\tan^3 23^\circ - \tan^2 23^\circ, \sec 23^\circ - 1)$  在坐標平面上的第\_\_\_\_\_象限內。

答：二

55. 設  $\angle A$  為銳角，若  $\cos A - \sin 40^\circ > 0$ ，則  $\angle A$   
 (1) 大於  $50^\circ$  (2) 小於  $50^\circ$  (3) 不小於  $50^\circ$  (4) 不大於  $50^\circ$ 。  
 答：(2)

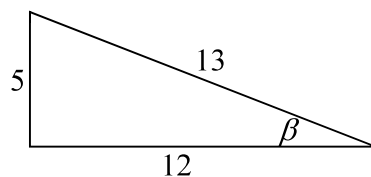
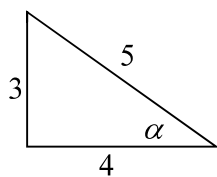
56. 若  $\tan 45^\circ > \sin A > \cos 60^\circ$ ，則銳角  $\angle A$  的範圍為  
 (1)  $0^\circ < \angle A < 90^\circ$  (2)  $30^\circ < \angle A < 60^\circ$  (3)  $0^\circ < \angle A < 60^\circ$  (4)  $30^\circ < \angle A < 90^\circ$ 。  
 答：(4)

57.  $\theta$  為銳角， $\tan \theta = k$ ，求  $\tan 2\theta$   
 答： $\frac{2k}{1-k^2}$



58. 已知兩個直角三角形三邊長分別為 3,4,5、5,12,13， $\alpha, \beta$  分別為它們的一角，如下圖所示。試選出正確的選項。

- (1)  $\sin \alpha > \sin \beta > \sin 30^\circ$   
 (2)  $\sin \alpha > \sin 30^\circ > \sin \beta$   
 (3)  $\sin \beta > \sin \alpha > \sin 30^\circ$   
 (4)  $\sin \beta > \sin 30^\circ > \sin \alpha$   
 (5)  $\sin 30^\circ > \sin \alpha > \sin \beta$



答：(2)

【109 年學測】

### 思考 3 三角函數的四個基本關係

#### 【一】倒數關係：

- (1)  $\sin \theta \csc \theta = 1$
- (2)  $\cos \theta \sec \theta = 1$
- (3)  $\tan \theta \cot \theta = 1$

#### 【二】商數關係：

- (1)  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$
- (2)  $\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

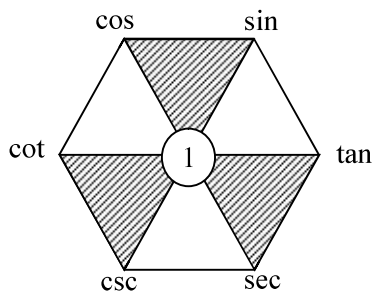
#### 【三】平方關係：

- (1)  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
- (2)  $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$
- (3)  $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$

pf:

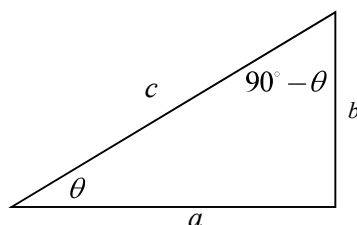
#### 【四】餘角關係：

- (1)  $\sin \theta = \cos(90^\circ - \theta)$
- (2)  $\tan \theta = \cot(90^\circ - \theta)$
- (3)  $\sec \theta = \csc(90^\circ - \theta)$



Note:

- ① 避免大學時微積分的學習有問題，我們還是一次把六個函數的性質都學齊



- ② 正餘可互換，角度相加等於 90 度

例 /

求  $\tan 10^\circ \tan 20^\circ \tan 30^\circ \cdots \tan 80^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答：1

小寬的叮嚀

原式 =  $\tan 10^\circ \tan 20^\circ \tan 30^\circ \tan 40^\circ \cot 40^\circ \cot 30^\circ \cot 20^\circ \cot 10^\circ$

例2

小寬的叮嚀

$$\sin^2(23^\circ + \theta) + \sin^2(67^\circ - \theta) = \underline{\hspace{2cm}}。$$

答：1



例3

小寬的叮嚀

$$\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \cdots + \sin^2 89^\circ = \underline{\hspace{2cm}}。$$

答： $\frac{89}{2}$




例4

小寬的叮嚀

設  $0^\circ < \theta < 45^\circ$ ，化簡： $\sqrt{\tan^2 \theta - 2 + \cot^2 \theta} = \underline{\hspace{2cm}}。$

答： $\cot \theta - \tan \theta$

  $\sqrt{\tan^2 \theta - 2 + \cot^2 \theta} =$

例5

小寬的叮嚀

假設  $\cos \theta + 3 \sin \theta = 2$ ，且  $0 < \theta < 90^\circ$ ，求  $\cos \theta + \sin \theta$  之值。

答： $\frac{4 + \sqrt{6}}{5}$

【88年日大自然組】



每 日 練 功

59. 設  $\angle A$  為銳角，求  $(\cos A + \sin A)^2 + (\cos A - \sin A)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答：2

60. 若  $\angle A$  為銳角，且  $\sin^2(90^\circ - A) = \frac{3}{4}$ ，求  $\sin A$  之值。

答： $\frac{1}{2}$

61. 若  $\angle A$  與  $\angle B$  互為餘角且  $\sin A = \frac{2}{3}$ ，則  $\sin B = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\tan(90^\circ - A) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答： $\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{\sqrt{5}}{2}$

62. 已知  $\sin 44^\circ = 0.6974$ ，則  $\cos 46^\circ - \sin 30^\circ$  之值 =  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

答：0.1974

63. 已知  $\sin 48.19^\circ = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ，則  $\sin 41.81^\circ$  之值 =  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

答： $\frac{2}{3}$

64. 若  $\sin \theta = \frac{1}{2}$ ，求  $\cos(90^\circ - \theta) \cdot \csc(90^\circ - \theta)$  之值 =  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

答： $\frac{\sqrt{3}}{3}$

65. 若  $0^\circ < A < 45^\circ$ ，且  $\sin 2A = \cos A$ ，則  $\cot A = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答： $\sqrt{3}$

66.  $\angle A$ 、 $\angle B$  為兩銳角，設  $\sin 62^\circ = \cos A$  且  $\tan(A+14^\circ) = \cot B$ ，則  $\angle A + \angle B =$  \_\_\_\_\_。  
答： $76^\circ$

67. 求  $\cot 10^\circ \cot 20^\circ \cot 30^\circ \cdots \cot 80^\circ =$  \_\_\_\_\_。  
答：1

68. 設  $\angle A + \angle B = 90^\circ$ ，則  $\sin A \tan B \sec B$  之值 = (1)  $\tan A$  (2)  $\sin A$  (3)  $\cos A$  (4)  $\cot A$   
答：(4)

69. 已知  $\sin 35^\circ = 0.574$ ， $\sin 55^\circ = 0.819$ ，則  $\tan 55^\circ$  約為  
(1) 0.574 (2) 0.819 (3) 0.701 (4) 1.427。  
答：(4)

70.  $\sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 70^\circ + \sin^2 80^\circ =$  \_\_\_\_\_。  
答：4

71.  $\sin^2(45^\circ + \theta) + \sin^2(45^\circ - \theta) =$  \_\_\_\_\_。  
答：1

72. 化簡  $\sin A \cos(90^\circ - A) + \cos A \sin(90^\circ - A) =$  \_\_\_\_\_。  
答：1

73. 設  $\theta$  為銳角，且  $\cos \theta + 8 \sin \theta = 4$ ，則  $\sec \theta + \tan \theta$  之值為 \_\_\_\_\_。  
答： $\frac{3}{2}$

74. 求  $\sin^4 17^\circ - \cos^4 17^\circ + 2\cos^2 17^\circ$  之值 = \_\_\_\_\_。

答：1

75.  $\sin A = \cos X \cos C$ ， $\sin B = \sin X \cos C$ ，求  $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C$

答：2

76. 若  $a \sin \theta + \cos \theta = 1$ ， $b \sin \theta - \cos \theta = 1$ ，則  $ab =$  \_\_\_\_\_。

答：1

77. 若  $\sin \theta = \cos^2 \theta$ ，則  $\frac{1}{1 - \sin \theta} + \frac{1}{1 + \sin \theta} =$  \_\_\_\_\_。

答： $1 + \sqrt{5}$

78. 試證： $\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = 2 \csc \theta$

79. 試證： $\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} - \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = 4 \cot \theta \csc \theta$

80. 試證： $\cos^6 \theta + \sin^6 \theta = 1 - 3\cos^2 \theta + 3\cos^4 \theta$

81. 求證： $\frac{1 + \sin \theta - \cos \theta}{1 + \sin \theta + \cos \theta} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$



## 思考 4 特殊求值分析

**例1** 《差一次求值》

設  $\cos \theta + \cos^2 \theta = 1$ ，試求

(1)  $\sin^2 \theta + \sin^4 \theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。


(2)  $\sin^2 \theta + \sin^6 \theta + \sin^8 \theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3)  $\sin^2 \theta + 2\sin^4 \theta + 2\sin^6 \theta + \sin^8 \theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答：(1)1 (2)1 (3)2

小寬的叮嚀

sin 平方加 cos 平方  
等於 1

  $\because \cos \theta + \cos^2 \theta = 1 \therefore \boxed{\cos \theta = 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta}$

(1)  $\sin^2 \theta + \sin^4 \theta =$

(2)  $\sin^2 \theta + \sin^6 \theta + \sin^8 \theta =$

(3)  $\sin^2 \theta + 2\sin^4 \theta + 2\sin^6 \theta + \sin^8 \theta =$

**【分析】**  $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+x} + \frac{x}{x+1} = 1$


Note :

**例2** 《倒數求值》

試化簡  $\frac{1}{1+\sin \theta} + \frac{1}{1+\cos \theta} + \frac{1}{1+\sec \theta} + \frac{1}{1+\csc \theta} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答：2

小寬的叮嚀

  $\frac{1}{1+\sin \theta} + \frac{1}{1+\cos \theta} + \frac{1}{1+\sec \theta} + \frac{1}{1+\csc \theta} =$

【分析】常用恆等式

$$(1) (\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2sc$$

$$(2) (\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2sc$$

$$(3) \tan \theta + \cot \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{sc}$$

$$(4) \sin^4 \theta + \cos^4 \theta = 1 - 2(sc)^2$$

$$(5) \sin^6 \theta + \cos^6 \theta = 1 - 3(sc)^2$$

Note :

注意左邊五條式子  
都有  $sc$

例3 《 $\sin \theta \pm \cos \theta$ 》

設  $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ ，試求

$$(1) \sin \theta \cdot \cos \theta = \underline{\hspace{2cm}} \circ \quad (2) \sin^3 \theta + \cos^3 \theta = \underline{\hspace{2cm}} \circ$$

$$(3) \sin^4 \theta + \cos^4 \theta = \underline{\hspace{2cm}} \circ \quad (4) \sin^5 \theta + \cos^5 \theta = \underline{\hspace{2cm}} \circ$$

$$(5) \sin^6 \theta + \cos^6 \theta = \underline{\hspace{2cm}} \circ \quad (6) \tan \theta + \cot \theta = \underline{\hspace{2cm}} \circ$$

$$\text{答：(1) } \frac{-3}{8} \quad (2) \frac{11}{16} \quad (3) \frac{23}{32} \quad (4) \frac{79}{128} \quad (5) \frac{37}{64} \quad (6) \frac{-8}{3}$$

小寬的叮嚀

$$\text{✎ (1) } \because (s+c)^2 = 1+2sc \quad \therefore sc = \frac{-3}{8}$$

$$(2) s^3 + c^3 = (s+c)^3 - 3sc(s+c) = \frac{11}{16}$$

$$(3) s^4 + c^4 =$$

$$(4) s^5 + c^5 = (s^2 + c^2)(s^3 + c^3) - s^2c^2(s+c) = \frac{79}{128}$$

$$(5) s^6 + c^6 =$$

$$(6) \tan \theta + \cot \theta =$$

**例4**

小寬的叮嚀

設  $f(n) = \sin^n \theta + \cos^n \theta$ ，求  $3f(4) - 2f(6) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答：1

$$\begin{aligned} 3f(4) - 2f(6) &= 3(s^4 + c^4) - 2(s^6 + c^6) \\ &= 3[1 - 2(sc)^2] - 2[1 - 3(sc)^2] = 1 \end{aligned}$$

**例5**

小寬的叮嚀

$f(n) = \sin^n \theta + \cos^n \theta$ ， $f(1) = 1$ ，求  $3f(3) + 4f(4) - 5f(5) = ?$

答：2

$$\begin{aligned} f(1) &= s + c = 1, \quad f(2) = s^2 + c^2 = 1 \\ \therefore (s + c)^2 &= s^2 + c^2 + 2sc \quad \therefore 1 = 1 + 2sc \quad \therefore sc = 0 \\ \begin{cases} f(3) = s^3 + c^3 = (s + c)^3 - 3sc(s + c) = 1 - 3sc = 1 \\ f(4) = s^4 + c^4 = 1 - 2sc = 1 \\ f(5) = s^5 + c^5 = (s^2 + c^2)(s^3 + c^3) - s^2c^2(s + c) = 1 \end{cases} \\ \therefore 3f(3) + 4f(4) - 5f(5) &= 3 + 4 - 5 = 2 \end{aligned}$$

**每日練功**

82. 設  $\sin \theta + \sin^2 \theta = 1$ ，試求

(1)  $\cos^2 \theta + \cos^4 \theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2)  $\cos^2 \theta + \cos^6 \theta + \cos^8 \theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3)  $\cos^2 \theta + 2\cos^4 \theta + 2\cos^6 \theta + \cos^8 \theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答：(1)1 (2)1 (3)2

83.  $\frac{1}{1 + \sin \theta} + \frac{1}{1 + \csc \theta} + \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} + \frac{1}{1 + \cot^2 \theta} + \frac{1}{1 + \cos^3 \theta} + \frac{1}{1 + \sec^3 \theta} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答：3

84.  $\frac{1}{1+\sin^2 A} + \frac{3}{1+\cos^2 A} + \frac{4}{1+\tan^2 A} + \frac{4}{1+\cot^2 A} + \frac{3}{1+\sec^2 A} + \frac{1}{1+\csc^2 A} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。  
 答：8

85. 試化簡  $\frac{1}{1+\sin^n \theta} + \frac{1}{1+\cos^n \theta} + \frac{1}{1+\sec^n \theta} + \frac{1}{1+\csc^n \theta} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。  
 答：2

86. 設  $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3}$ ，試求

- (1)  $\sin \theta \cos \theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 (2)  $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 (3)  $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。  
 (4)  $\sin^5 \theta + \cos^5 \theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 (5)  $\sin^6 \theta + \cos^6 \theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 (6)  $\tan \theta + \cot \theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。  
 (7)  $\tan^3 \theta + \cot^3 \theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答：(1)  $\frac{-4}{9}$  (2)  $\frac{13}{27}$  (3)  $\frac{49}{81}$  (4)  $\frac{101}{243}$  (5)  $\frac{11}{27}$  (6)  $\frac{-9}{4}$  (7)  $\frac{-297}{64}$

87.  $\theta$  為銳角， $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{5}$ ，求

(1)  $\sin \theta \cdot \cos \theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 (2)  $\sin \theta = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\cos \theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答：(1)  $\frac{12}{25}$  (2)  $\frac{4}{5}$ ， $\frac{3}{5}$

88. 設  $45^\circ < A < 90^\circ$ ，若  $\sin A + \cos A = \frac{5}{4}$ ，則  $\sin A - \cos A$  之值 =  $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

答： $\frac{\sqrt{7}}{4}$

89. 若  $\angle A$  為銳角，且  $\sin A \cos A = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ，求：

(1)  $\sin A + \cos A$  (2)  $\sin A - \cos A$  (3)  $\sin^3 A + \cos^3 A$

答：(1)  $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$  (2)  $\pm \left( \frac{\sqrt{3}-1}{2} \right)$  (3)  $\frac{1+3\sqrt{3}}{8}$

90. 假設  $\sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，且  $P = \tan \theta + \cot \theta$ ，則  $P =$  \_\_\_\_\_。

答：8

91. 假設  $\sin \theta + \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ，且  $P = \tan \theta + \cot \theta$ ，則  $P =$  \_\_\_\_\_。

答：6

【73 年日大社會組】

92. 設  $0^\circ < \theta < 45^\circ$ ，若  $\tan \theta + \cot \theta = \frac{25}{12}$ ，則  $\sin \theta - \cos \theta =$  \_\_\_\_\_。

答： $\frac{-1}{5}$

93. 設  $f(n) = \sin^n \theta + \cos^n \theta$ ，求  $4f(6) - 6f(4)$  之值。

答：-2

94. 設  $f(n) = \cos^n \theta + \sin^n \theta$ ，若  $f(1) = 1$ ，則下列何者為真？

(A)  $f(1) = f(2) = f(3) = f(4)$  (B)  $\sin \theta \cos \theta = 0$  (C)  $f(2) = 2f(1)$

(D)  $f(3) = 2f(2)$  (E)  $f(4) = [f(2)]^2$ 。

答：(A)(B)(E)